大同大學103 學年度(寒)轉學入學考試試題

考試科目:工程數學　　　所別:機械工程學系　　　第全頁

註:本次考試 <u>不可以</u>參考自己的書籍及筆記； <u>不可以</u>使用字典； <u>不可以</u>使用計算機

1. (18%) 選擇題

1-1. 說明以下微分方程式的階數與線性(order and linearity) $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+y=0$

(A) 3rd-order linear 三階線性　　(B) 3rd-order nonlinear 三階非線性

(C) 4th-order linear 四階線性　　(D) 4th-order nonlinear 四階非線性

1-2. 說明以下微分方程式的階數與線性(order and linearity) $e^{-x}y'+(4\sin x)y=(\tan x)y''-4e^{-x^2}$

(A) 1^{st}order linear 一階線性　　(B) 1^{st}order nonlinear 一階非線性

(C) 2^{nd}order linear 二階線性　　(D) 2^{nd}order nonlinear 二階非線性

1-3. 下列那一個方程式是屬於可分離的微分方程式(separable differential equation) ?

(A) $\frac{dy}{dx}=\sin(xy)$　(B) $(x^2+1)\frac{dy}{dx}=\sqrt{x+y}$　(C) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}$　(D) $x\frac{dy}{dx}\tan^{-1}y=e^{x+y}$

1-4. 下列那一個方程式是屬於齊性的微分方程式(homogeneous differential equation)?

(A) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+7y}{7x+2y}$　(B) $(x^2+y^2)dy-x^4dx=0$　(C) $\frac{dy}{dx}+x^2y=xy^2$　(D) $\left(y^2+x\right)dx=\left(x+y^2\right)dy$

1-5. 下列那一個微分方程式是屬於伯努利方程式(Bernoulli equation)?

(A) $\left(x^2+y^2\right)dy-2x^2ydx=0$　(B) $e^ydx=5-\sin(y)dy$　(C) $3dy=\sin(x)\left(y^2-y\right)dx$　(D) $\frac{dy}{dx}=x\ln(y)$

1-6. 分辨此偏微分方程式的類型. $9\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+3\frac{\partial\phi}{\partial x}-7\frac{\partial\phi}{\partial y}+8\phi-9=0$

(A) Parabolic 拋物線型　(B) Elliptic 橢圓型　(C) Hyperbolic 雙曲線型

2. (10%) 求解常微分方程式　$2xy^3dx+\left(1+3x^2y^2\right)dy=0$

3. (10%) 求解常微分方程式　$\frac{dy}{dx}-2xy=e^{x^2}$

4. (10%) 求解常微分方程式　$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=52\cos(2x)$

5. (10%) 推導出函數 $f(x)=\begin{pmatrix}0, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\end{pmatrix}$的傅立葉級數(Fourier Series)

6. (10%) 拉普拉斯轉換(Laplace Transform)的定義為 $L\left[f(t)\right]\equiv\int_{t=0}^{t=\infty}f(t)e^{-st}dt$

則推導出 $f(t)=\cosh(2t)$ 的拉普拉斯轉換

7. (3%)(a) 求解向量場 $\vec{V}=\cosh(xyz)\vec{i}+\ln(xyz)\vec{j}+\left(e^{xyz}\right)\vec{k}$ 的散度(divergence)

(4%)(b) 求解向量場 $\vec{V}=xy\vec{i}+xyz\vec{j}+xyz^2\vec{k}$ 的漩度(curl)

8. (10%) 求出矩陣(Matrix) $[A]=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\-2&0&3\end{bmatrix}$ 的特徵值(Eigenvalue)

9. (15%) 求解偏微分方程式 $\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2T}{\partial x^2}$,　$0<x<\pi,\ t>0$

這裡 $T(x,0)=1$ 且 $T(0,t)=0$ 與 $\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=\pi}=0$