

大同大學 九十 學年度 轉學考試 試題

考試科目：微積分

級別：二年級

第 1 頁，共 1 頁

註：本次考試不可以參考自己的書籍及筆記； 不可以使用字典； 不可以使用計算器。

請寫出計算過程，否則不予計分。

$\begin{matrix} \sin & \cos \\ \tan & \cot \\ \sec & \csc \end{matrix} \triangle$
 $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec \theta (\tan \theta + 1)}{\tan \theta + 1} = 4 \tan^2 \theta - 1$

1. 求下列極限。

(18%)

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x + 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{\sin x - x^2}$

$x = \tan \theta$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + \cos x)^{1/x}$

$y = \sqrt{3} \cos \theta$

2. 求下列積分。

(18%)

(a) $\int (1-x)e^{-x} dx$

(b) $\int \frac{3x-1}{x^2-2x-3} dx$

(c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x}$

$3y(y-2)$
 $y=0 \vee 2$
 $x=4$
 $3y^2 - 6y = 0$

3. 設 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 2, \\ 4x - 3, & x \geq 2. \end{cases}$

(a) 求左極限 $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ 與右極限 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ 。

(6%)

(b) 請問函數 f 在 $x = 2$ 可微分嗎？為什麼？

(2%)

4. 求過曲面 $6x^2yz + xy^2z^2 - 2y^3 = 0$ 上一點 $(-1, -2, 1)$ 的切平面方程式。

(6%)

5. 求下列級數的收斂區間 (the interval of convergence)。

(10%)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n(2n-1)}$$

$24 + 4 = 28$

6. 求函數 $f(x, y)$ 的臨界點並檢驗是否為相對極大值或極小值。

(10%)

$f(x, y) = 3x^2 + 6xy + y^3 + 1$

$12x - 24 + 8 + 1 = -3$

$-2, 3$

7. 求在心臟線 $r = 1 + \sin \theta$ 外部，且在圓 $r = \sqrt{3} \cos \theta$ 內部的區域面積。

(10%)

8. (a) 求函數 $f(x) = e^{x^2}$ 的反函數。

(3%)

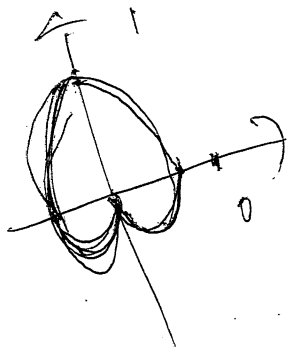
(b) 求 $\int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e \sqrt{\ln y} dy$ 。

(7%)

9. 求橢圓拋物面 $z = 4 - 4x^2 - y^2$ 與 xy -平面所圍成的實體區域 (solid region)

(10%)

的體積。



$1 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta = 3 \cos^2 \theta$
 $x \cdot e^{x^2} - \int x \cdot 2x dx$
 $= 2x^2 dx$
 $x \cdot e^{x^2} - \int 2x^2 e^{x^2} dx$
 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{n}$